

نظریه اطلاعات کوانتومی - بخش اول

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۷ اردیبهشت ۱۴۰۰

۱ مقدمه

همانطور که آنتروپی شانون در نظریه اطلاعات کلاسیک نقش محوری دارد، در نظریه اطلاعات کوانتومی نیز تعمیم آنتروپی شانون که به آن آنتروپی فون نویمان^۱ می‌گوییم، نقش کلیدی دارد و همه مفاهیم این نظریه بر مبنای این آنتروپی تعریف می‌شوند. در واقع آنتروپی فون نویمان از سه جهت نقش کلیدی در نظریه اطلاعات کوانتومی ایفا می‌کند:

یک - در تعیین میزانی که می‌توان اطلاعات کوانتومی را فشرده کرد،

دو- در تعیین ظرفیت یک کانال کوانتومی،

سه - و در تعیین اندازه درهمتنیدگی حالت های کوانتومی.

^۱ von Neumann Entropy

می توان نقش دیگری را نیز برای آنتروپی فون نویمان در نظر گرفت که مربوط است به تعریف بهتری از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که از آنجا که مستقیماً به نظریه اطلاعات مربوط نیست تنها به اختصار آن را معرفی خواهیم کرد. در این درس ما نخست آنتروپی فون نویمان را تعریف کرده و خواص آن را بررسی می کنیم. این مطالعه فعلاً بدون توجه به مفهوم فیزیکی این تابع انجام می شود. از نظر تاریخی نیز این نکته جالب توجه است که آنتروپی فون نویمان پیش از آنتروپی شانون و توسط جان فون نویمان^۲ ریاضی فیزیکدان مجارستانی الاصل امریکایی که کارهای مهم زیادی را در شاخه های مختلف فیزیک و ریاضیات انجام داده ، معرفی شده است.



شکل ۱: جان فون نویمان، ریاضیدان مجارستانی (۱۹۰۳-۱۹۵۷)

۲ آنتروپی فون نویمان و خواص آن

■ تعریف: هرگاه ρ یک ماتریس چگالی باشد، آنتروپی فون نویمان آن به صورت

$$S(\rho) := -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (۱)$$

John von Neumann^۲

تعریف می شود. هرگاه ρ به صورت زیر قطری شود،

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \quad (2)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (3)$$

به این ترتیب آنتروپی فون نویمان برابر است با همان آنتروپی شانون برای توزیع احتمالی که از ویژه مقادیرهای ماتریس چگالی تشکیل شده است. برای آنتروپی فون نویمان نیز واحد بیت را به کار می بریم. بنابراین آنتروپی حالت $\rho = \frac{I}{2}$ یک بیت است.

■ **مثال:** برای یک کیوبیت که در حالت $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma)$ قرار دارد، می دانیم ویژه مقادیر ماتریس چگالی برابر است با $\frac{1 \pm r}{2}$ بنابراین، آنتروپی فون نویمان برابر است با:

$$S(\rho) = - \left[\frac{1+r}{2} \log_2 \frac{1+r}{2} + \frac{1-r}{2} \log_2 \frac{1-r}{2} \right]. \quad (4)$$

■ توضیح در باره نمادها:

آنتروپی شانون را برای متغیر تصادفی X با $H(X)$ نشان می دهیم. البته این آنتروپی به تابع توزیعی که روی این متغیر تصادفی تعریف شده بستگی دارد و نه به خود متغیر تصادفی X . بنابراین نماد دقیق این است که بنویسیم $H(P_x)$ ولی از نماد خلاصه $H(X)$ برای این منظور استفاده می کنیم. بسته به نیاز خود و برای روشنی و سادگی روابط از هرکدام از این نمادها استفاده می کنیم. بنابراین به یاد داریم که

$$H(X) = H(P_x) \quad (5)$$

متناظر با آن آنتروپی فون نویمان برای یک سیستم A را با $S(A)$ نشان می دهیم ولی به یاد داریم که آنتروپی تابع ماتریس چگالی سیستم A است یعنی باید بنویسیم $S(\rho_A)$. باز هم بسته به نیاز خود و برای روشنی و سادگی روابط از هرکدام از این نمادها استفاده می کنیم. بنابراین به یاد داریم که

$$S(A) = S(\rho_A). \quad (6)$$

اغلب اوقات اگر در باره یک سیستم معین حرف می زنیم از نوشتن اندیس A نیز صرف نظر می کنیم و می نویسیم $S(\rho)$. حال خواص آنتروپی فون نویمان را بیان واکثر آنها را ثابت می کنیم.

■ هرگاه ρ یک حالت خالص باشد، $S(\rho) = 0$. اثبات این رابطه ساده است و با قطری کردن ρ براحتی انجام می شود.

■ هرگاه $\rho' = U\rho U^\dagger$ که در آن U تبدیل یکانی است آنگاه $S(\rho') = S(\rho)$.

■ هرگاه فضای هیلبرت ρ ، d بعدی باشد، $S(\rho) \leq \log_2 d$.

■ **اثبات:** با قطری کردن ρ بدست می آوریم

$$S(\rho) = - \sum_i p_i \log_2 p_i = H(\{p_i\}). \quad (7)$$

درفصل های قبل دیده ایم که تابع $H(\{p_i\})$ مقدار ماکزیمم خود را برای $p_i = \frac{1}{d}$ اختیار می کند و این ماکزیمم برابر است با $\log_2 d$.

بسیاری از خواص دیگر آنتروپی فون نویمان با استفاده از تعریف آنتروپی نسبی و نامثبت بودن آن ثابت می شوند. بنابراین نخست آنتروپی نسبی را تعریف می کنیم.

■ **تعریف:** فرض کنید که ρ و σ دو ماتریس چگالی باشند. در این صورت آنتروپی نسبی به صورت زیر توصیف می شود:

$$S(\rho || \sigma) = \text{tr}(\rho \log_2 \rho - \rho \log_2 \sigma). \quad (8)$$

بدیهی است که آنتروپی نسبی نسبت به تعویض دو ماتریس چگالی متقارن نیست.

■ **مثال:** برای محاسبه آنتروپی نسبی بین دو حالت ρ و σ بهترین کار این است که اولین جمله را در پایه ویژه حالت های ρ و دومین جمله

را در پایه ویژه حالت های σ حساب کنیم. به این ترتیب اگر تجزیه طیفی این دو حالت به ترتیب زیر باشد،

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \quad \sigma = \sum_\alpha q_\alpha |\alpha\rangle\langle \alpha|, \quad (9)$$

آنگاه

$$S(\rho || \sigma) = \sum_i p_i \log i - \sum_\alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \log q_\alpha. \quad (10)$$

بنابراین کافی است که عناصر ماتریسی $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ را حساب کنیم تا بتوانیم آنتروپی نسبی را بدست آوریم.

■ قضیه: (نامساوی کلاین)^۳ آنتروپی نسبی همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است، یعنی

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq 0 \quad \forall \rho, \sigma. \quad (11)$$

اثبات: پایه ای که ماتریس چگالی ρ در آن قطری است را با $\{|i\rangle\}$ نشان می دهیم. داریم $\rho = \sum p_i |i\rangle\langle i|$ و از آنجا:

$$\begin{aligned} S(\rho \parallel \sigma) &= \text{tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) = \sum_i (p_i \log p_i - \langle i | \rho \log \sigma | i \rangle) \\ &= \sum_i p_i (\log p_i - \langle i | \log \sigma | i \rangle) \end{aligned} \quad (12)$$

حال پایه ای که σ در آن قطری است را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. $\sigma = \sum_\alpha q_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$. در نتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho \parallel \sigma) = \sum_i p_i \left(\log p_i - \sum_\alpha P_{i\alpha} \log q_\alpha \right) \quad (13)$$

که در آن $P_{i\alpha} = \langle i | \alpha \rangle \langle \alpha | i \rangle$. واضح است که $0 \leq P_{i\alpha} \leq 1$ و $\sum_\alpha P_{i\alpha} = 1$. بنابراین با توجه به خاصیت تحدب تابع لگاریتم خواهیم داشت:

$$\sum_\alpha P_{i\alpha} \log q_\alpha \leq \log \left(\sum_\alpha P_{i\alpha} q_\alpha \right) =: \log r_i, \quad (14)$$

که در آن $r_i = \sum_\alpha P_{i\alpha} q_\alpha$. تساوی وقتی برقرار می شود که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی برابر با صفر باشند. در نتیجه تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq \sum_i p_i \frac{\log r_i}{\log p_i} \quad (15)$$

و تساوی وقتی رخ می دهد که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند. اما می دانیم که طرف راست خود آنتروپی نسبی دو توزیع احتمال p_i و r_i است و بنا بر قضیه ای که در فصل های قبل ثابت کرده ایم، این کمیت همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است که تساوی فقط برای وقتی رخ می دهد که $r_i = p_i$. پس تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq 0 \quad (16)$$

که در آن تساوی وقتی رخ می دهد که $r_i = p_i$ و همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند. اما این به این معناست که p_i ها با q_i ها یکی باشند. حال با استفاده از این قضیه به بیان و اثبات دیگر خواص آنتروپی فون نویمان می پردازیم.

^۳Klein Inequality

■ **آنتروپی فون نویمان یک تابع محدب^۴ است.**

یعنی به ازای $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 1$ به طوری که $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ داریم

$$S(\lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_n \rho_n) \geq \lambda_1 S(\rho_1) + \dots + \lambda_n S(\rho_n). \quad (17)$$

بنابراین با مخلوط کردن حالت های کوانتومی آنتروپی حالت کوانتومی افزایش می یابد که از نظر شهودی نیز معنای روشنی دارد.

■ **اثبات:** قضیه را برای حالت $n = 2$ ثابت می کنیم. برای حالت n دلخواه اثبات قضیه شبیه این حالت ساده است.

قراری دهیم:

$$\sigma := \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2. \quad (18)$$

از نامساوی (11) استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &\leq -tr(\rho_1 \log \sigma), \\ S(\rho_2) &\leq -tr(\rho_2 \log \sigma). \end{aligned} \quad (19)$$

حال از ترکیب خطی دونامساوی بالا با ضرایب λ_1 و λ_2 به دست می آوریم:

$$\lambda_1 S(\rho_1) + \lambda_2 S(\rho_2) \leq S(\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2). \quad (20)$$

■ **مثال:** حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و $|1\rangle\langle 1|$ را که دارای آنتروپی صفر هستند با احتمال مساوی با هم مخلوط می کنیم حالتی که بدست می آید یک

حالت کاملاً مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است که آنتروپی اش برابر با یک است.

به این ترتیب اگر در جستجوی حالتی باشیم که کمترین میزان آنتروپی را داشته باشد حتماً می بایست این حالت را در زیرمجموعه حالت های خالص جستجو کنیم. هم چنین محدب بودن آنتروپی (شکلی شبیه به کله قند) نشان می دهد که هرگاه نقطه بیشینه تابع $S(\rho)$ را بخواهیم پیدا کنیم همان نقطه بیشینه مطلق هم هست و این نکته خیلی مهمی است.

■ **تمرین:** تابع $f(x) := S(x\frac{I}{2} + (1-x)\rho)$ را در نظر بگیرید که در آن ρ یک ماتریس چگالی یک کیوبیتی است. مقدار ماکزیمم این

تابع در چه نقطه ای رخ می دهد و مقدار آن چقدر است؟

Convex^۴

■ آیا یک کانال کوانتومی آنتروپی حالت ها را افزایش می دهد؟ ممکن است با الهام از ترمودینامیک فکر کنیم که یک کانال کوانتومی همواره آنتروپی حالت ها را افزایش می دهد اما چنین نیست. به عنوان مثال یک کانال کوانتومی مثل کانال واقطبش یا کانال بیت برگردان، یک حالت خالص را تبدیل به یک حالت آمیخته می کند و آنتروپی آن را افزایش می دهد. اما کانالی را در نظر بگیرید که همه حالت ها را به یک حالت خالص می نگارد،

$$\mathcal{E}(\rho) = Tr(\rho)|\phi_0\rangle\langle\phi_0|. \quad (21)$$

این کانال همه حالت ها را به حالتی می نگارد که آنتروپی اش صفر است. دقت کنید که نگاهت فوق واقعا یک کانال کوانتومی (یک نگاهت کاملا مثبت) را تعریف می کند. برای تصدیق این نکته کافی است که نمایش کراوس این نگاهت را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \langle i|\rho|i\rangle |\phi_0\rangle\langle\phi_0| = \sum_i |\phi_0\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle\phi_0| \quad (22)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس این نگاهت به صورت $A_i = |\phi_0\rangle\langle i|$ هستند.

■ یک نتیجه از خاصیت تحذب آنتروپی به صورت زیر است. فضای ماتریس های چگالی در یک فضای هیلبرت H را با $D(H)$ نشان می دهیم. فرض کنید که $f : D(H) \rightarrow D(H)$ یک نگاهت خطی (مثلا یک کانال کوانتومی) است. این تابع هر ماتریس چگالی را به یک ماتریس چگالی تبدیل می کند. می خواهیم ماتریس چگالی ای مثل ρ_0 را پیدا کنیم که آنتروپی $f(\rho_0)$ کمترین مقدار ممکن باشد. جستجو در فضای همه ماتریس های چگالی کار بسیار سختی است، اما خاصیت تحذب آنتروپی می گوید که کافی است جستجوی خود را به فضای ماتریس های چگالی خالص محدود کنیم که فضای بسیار کوچکتری است. برای اثبات این قضیه فرض می کنیم که ρ_0 حالت مورد نظر باشد. این حالت یک تجزیه آنزاملی به شکل $\rho_0 = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ دارد. می نویسیم:

$$S[f(\rho)] = S[f(\sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|)] = S[\sum_k p_k f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)] \geq \sum_k p_k S[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)]. \quad (23)$$

از بین حالت های طرف راست یک حالت مثل $|\phi_0\rangle$ وجود دارد که

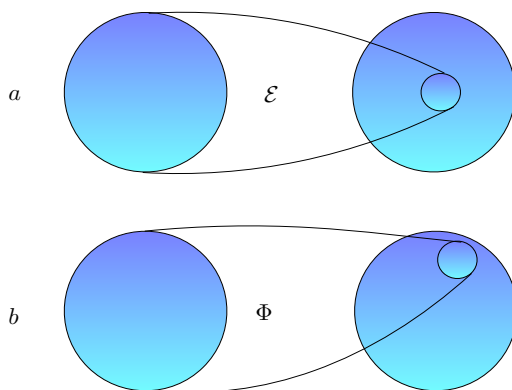
$$S[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)] \leq S[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)] \quad \forall k. \quad (24)$$

در نتیجه

$$S[f(\rho)] \equiv \sum_k p_k S[f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)] \geq \sum_k p_k S[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)] = S[f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)]. \quad (25)$$

به این ترتیب حالتی یافته ایم که خالص است و آنتروپی اش برای تابع f کمتر از یک حالت مخلوط اولیه است. دقت کنید که این قضیه برای نگاشت هایی فراتر از کانال ها هم برقرار است زیرا فقط از خاصیت خطی بودن نگاشت استفاده کرده ایم نه از خاصیت مثبت بودن یا رد نگهدار بودن آن.

در درسهای پیشین نشان داده ایم که همه کانال ها فاصله دو حالت ورودی را نسبت به هم کاهش می دهند که اصطلاحاً می گوئیم کانال ها خاصیت انقباضی دارند^۵ اما در عین حال بعضی از کانال ها آنتروپی حالت ورودی را افزایش می دهند و بعضی دیگر کاهش. این که چرا این دو خاصیت با یکدیگر سازگار هستند در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲: شکل بالا کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرکز کره تصویر می کند. چنین کانالی آنتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط افزایش می دهد. شکل زیر کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرز کره (نزدیکی حالت های خالص) تصویر می کند، چنین کانالی آنتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط کاهش می دهد.

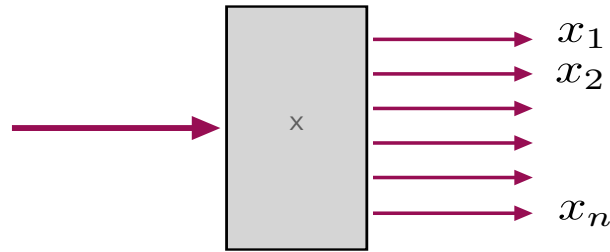
■ **قضیه: آنتروپی اندازه گیری:** فرض کنید که مشاهده پذیر $X = \sum_i x_i |x_i\rangle\langle x_i|$ را اندازه گیری کنیم. در این صورت مقادیر $\{x_i\}$ با احتمالات $\{p_i = \langle x_i | \rho | x_i \rangle\}$ مشاهده خواهند شد. در این صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) \leq H(X), \quad (۲۶)$$

که در آن علامت تساوی تنها وقتی برقرار خواهد بود که $[X, \rho] = 0$. از نظر شهودی نیز این قضیه روشن است زیرا ممکن است اندازه گیری

^۵Contraction Property

ای که انجام می دهیم در یک پایه نامناسب باشد که به دلیل اصل عدم قطعیت به پراکنده شدن نتایج و در نتیجه افزایش آنتروپی بینجامد. مثال روشن آن وقتی است که یک حالت $|+\rangle$ را در پایه \approx اندازه می گیریم. این موضوع به صورت شماتیک در شکل (۳) نشان داده شده است.



$$S(\rho) \leq H(X)$$

شکل ۳: اندازه گیری در یک پایه دلخواه همواره باعث افزایش آنتروپی می شود. فقط وقتی آنتروپی حالت ورودی با آنتروپی شانون خروجی یکی است که $[\rho, X] = 0$ باشد.

■ **اثبات:** ماتریس چگالی σ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma := \sum_i p_i |x_i\rangle\langle x_i|. \quad (27)$$

می دانیم که $S(\sigma) = H(X)$. با استفاده از قضیه (11) می دانیم که

$$S(\rho) \leq -tr(\rho \log \sigma), \quad (28)$$

که در آن علامت تساوی فقط وقتی برقرار خواهد بود که $\rho = \sigma$. طرف راست رادر پایه $\{|x_i\rangle\}$ حساب می کنیم و بدست می آوریم

$$tr(\rho \log \sigma) = \sum_i \langle x_i | \rho \log \sigma | x_i \rangle = \sum_i \langle x_i | \rho | x_i \rangle \log p_i = \sum_i p_i \log p_i, \quad (29)$$

که در تساوی آخر از قطری بودن σ در این پایه و هم چنین تساوی $p_i = \langle x_i | \rho | x_i \rangle$ استفاده کرده ایم. با ترکیب (28,29) به رابطه موردنظری یعنی رابطه $S(\rho) \leq H(X)$ می رسمیم. تساوی وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم $\rho = \sigma$. اما این امر به این معناست که $[\rho, X] = 0$.

■ **یک توضیح مهم:** اگر به اثبات بالا دقت کنیم درمی یابیم که در آن از اینکه ویژه پایه های مشاهده پذیر X یک پایه برای فضا تشکیل داده اند استفاده کرده ایم. بنابراین قضیه بالا تنها برای وقتی برقرار است که یک اندازه گیری تصویری با تصویرگرهای رتبه یک از نوع $\{|x_i\rangle\langle x_i|, i = 1, 2, \dots, \dim(H)\}$ انجام می دهیم. برای یک مثال نقیض تصور کنید که حالت ورودی یک حالت از نوع $\rho = \frac{1}{4}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|)$ یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای زیر انجام می دهیم:

$$P_0 = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|, \quad P_1 = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|$$

در این صورت خواهیم داشت $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$. در این جا داریم $S(\rho) = 2$ و حال آنکه آمار خروجی اندازه گیری آنتروپی یک دارد.

■ آنچه که نشان دادیم در واقع چنین است:

$$S(\rho) \leq - \sum_i \langle x_i | \rho | x_i \rangle \log \langle x_i | \rho | x_i \rangle = S(\rho_D), \quad (30)$$

که در آن ماتریس ρ_D همان ماتریس چگالی در یک پایه دلخواه است با این تفاوت که تمام عناصر غیر قطری اش برابر با صفر قرار داده شده است. (دقت کنید که در هر پایه ای اگر این کار را انجام دهیم باز هم یک ماتریس چگالی معتبر پدید می آید.) بنابراین یک معنای این قضیه این است که اگر در هر پایه ای عناصر غیر قطری ماتریس چگالی ρ را برابر با صفر قرار دهیم، در این صورت ماتریس چگالی ای بدست خواهد آمد که آنتروپی آن از حالت اول بیشتر خواهد بود. یک نمونه از این رابطه در زیر نشان داده شده است. برای همه ماتریس های رابطه زیر برقرار است:

$$S \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leq S \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & p_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (31)$$

معنای دیگر آن این است در بین همه اندازه گیری ها اندازه گیری مشاهده پذیری که با ماتریس چگالی جابجایی شود کمترین عدم قطعیت یا آنتروپی را در نتایج ایجاد می کند.

■ قضیه زیرجمع پذیری: ^۶ هرگاه AB یک دستگاه دوبخشی باشد،

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (۳۲)$$

که در آن $\rho_A = tr_B(\rho_{AB})$ و $\rho_B = tr_A(\rho_{AB})$. تساوی فقط وقتی برقرار می شود که $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. این خاصیت به معنای آن است که آنتروپی یک دستگاه همواره از مجموع آنتروپی اجزاء آن کمتر است. این امر بدلیل همبستگی هایی است که ممکن است بین اجزاء وجود داشته باشد. مثال روشن آن وقتی است که یک حالت بل را در نظر می گیریم. آنتروپی کل فقط وقتی برابر با مجموع آنتروپی اجزاء است که بین آنها همبستگی وجود نداشته باشد.

■ اثبات: ماتریس چگالی زیر را تعریف می کنیم:

$$\sigma_{AB} := \rho_A \otimes \rho_B, \quad (۳۳)$$

و از نامساوی (11) استفاده می کنیم:

$$S(\rho_{AB}) \leq -tr(\rho_{AB} \log \sigma_{AB}). \quad (۳۴)$$

حال دقت می کنیم که

$$\begin{aligned} \log(\sigma_{AB}) &= \log(\rho_A \otimes \rho_B) = \log((\rho_A \otimes I)(I \otimes \rho_B)) = \log(\rho_A \otimes I) + \log(I \otimes \rho_B) \\ &= (\log \rho_A) \otimes I + I \otimes (\log \rho_B). \end{aligned} \quad (۳۵)$$

حال طرف راست را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} -tr(\rho_{AB} \log \sigma_{AB}) &= -tr(\rho_{AB}(\log \rho_A \otimes I) - tr(\rho_{AB}(I \otimes \log \rho_B))) \\ &= -tr_A(\rho_A \log \rho_A) - tr_B(\rho_B \log \rho_B). \end{aligned} \quad (۳۶)$$

باکنار هم گذاردن روابط بالا به نتیجه دلخواه می رسیم. این رابطه یادآور رابطه $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ برای آنتروپی کلاسیک است.

Subadditivity^۶

در درسهای قبلی دیده ایم که آنتروپی شانون در نامساوی $H(X, Y) \geq H(X)$ صدق می کند. سوال این است که آیا آنتروپی فون نویمان نیز در یک رابطه مشابه صدق می کند یا خیر. پاسخ این سوال منفی است. کافی است که سیستم مرکب AB را در یک حالت درهم تنیده $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ قرار دهیم و دریابیم که رابطه $S(\rho_{AB}) = 0$ و حال آنکه $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$. بنابراین برخلاف حالت کلاسیک به طور کلی داریم

$$S(\rho_{AB}) \not\geq S(\rho_A). \quad (37)$$

با این وجود خاصیت زیر برقرار است.

■ **نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی:** این نامساوی که نامساوی آراکی-لیب^۷ نیز خوانده می شود به شکل زیر است:

$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|. \quad (38)$$

■ **اثبات:** می دانیم که سیستم AB در حالت ρ_{AB} است. می توان این حالت را خالص سازی کرد به این معنا که با افزودن یک سیستم

کمکی R حالت خالصی مثل $|\Psi\rangle_{ABR}$ در نظر گرفت که $\rho_{AB} = tr_R(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و یا $\rho_A = tr_{BR}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و الا اخر.

حال از خاصیت جمع پذیری آنتروپی استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\rho_{BR}) \leq S(\rho_B) + S(\rho_R). \quad (39)$$

اما از آنجا که حالت $|\Psi\rangle_{ABR}$ یک حالت خالص است، داریم $S(\rho_{BR}) = S(\rho_A)$ و $S(\rho_R) = S(\rho_{AB})$. در نتیجه رابطه (۳۹) به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho_A) \leq S(\rho_B) + S(\rho_{AB}) \quad (40)$$

و یا

$$S(\rho_{AB}) \geq S(\rho_A) - S(\rho_B). \quad (41)$$

با عوض کردن جای A و B و تکرار این نامساوی به نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی می رسم.

دقت کنید که با توجه به اینکه $H(\{p_i\})$ یک کمیت مثبت است، این رابطه با خاصیت تحدب آنتروپی سازگار است.

^۷Araki-Lieb Inequality

■ **تمرین:** فرض کنید که ρ_{AB} یک حالت درهم تنیده خالص است. طرفین نامساوی (۳۸) را حساب کنید.

حال از خود می پرسیم که اگر پایه ماتریسهای چگالی فوق برهم عمود نباشد این تساوی به چه شکلی تغییر می کند. پاسخ این سوال در قضیه زیر داده شده است:

■ **قضیه:** تابع آنتروپی در حالت کلی در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\sum_i p_i S(\sigma_i) \leq S\left(\sum_i p_i \sigma_i\right) \leq H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \quad (42)$$

اگر آنتروپی متوسط حالت ها را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\bar{S} := \sum_i p_i S(\sigma_i), \quad (43)$$

رابطه (۴۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{S} \leq S\left(\sum_i p_i \sigma_i\right) \leq \bar{S} + H(X). \quad (44)$$

به این ترتیب این قضیه یک حد بالا و پایین که براحتی قابل محاسبه است بدست می دهد. ممکن است که آنتروپی یک حالت دلخواه را نتوانیم به طور دقیق حساب کنیم ولی این نامساوی بلافاصله به ما می گوید که آنتروپی بین کدام دو حد واقع شده است.

■ **اثبات:** نامساوی سمت چپ همان خاصیت تحدب آنتروپی است که قبلا آن را ثابت کرده ایم. پس توجه خود را به نامساوی طرف راست

معطوف می کنیم. نخست این نامساوی را برای وقتی ثابت می کنیم که حالت های σ_i خالص باشند یعنی $\sigma = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. البته این حالت ها لزومی ندارد که برهم عمود باشند. در این حالت از آنجا که $S(\sigma_i) = 0$ است کافی است که ثابت کنیم

$$S\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \leq H(\{p_i\}).$$

برای اثبات این رابطه حالت خالص زیر را می سازیم:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \otimes |i\rangle, \quad (45)$$

که در آن حالت های $\{|i\rangle\}$ برهم عمودند. برای این حالت خالص بدست می آوریم:

$$\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \rho_B = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} \langle\psi_i|\psi_j\rangle |j\rangle\langle i|. \quad (46)$$

از تجزیه اشمیت می دانیم که آنتروپی این دو حالت باهم مساوی است. یعنی $S(\rho_A) = S(\rho_B)$. البته نکته این است که حالت ρ_B حالت ساده ای نیست که بتوانیم آنتروپی آن را براحتی حساب کنیم. اما در این مرحله می توانیم از یک خاصیت دیگر که قبلا ثابت کرده ایم استفاده کنیم و آن اینکه اندازه گیری تصویری هیچگاه آنتروپی را کاهش نمی دهد. حال روی حالت ρ_B یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای $\{P_i = |i\rangle\langle i|\}$ انجام می دهیم. حالتی که بدست می آید برابر است با:

$$\rho'_B = \sum_i P_i \rho_B P_i = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|. \quad (47)$$

بنابر این داریم:

$$S(\rho_A) \equiv S(\rho_B) \leq S(\rho'_B) \quad (48)$$

و یا

$$S\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|\right) \leq H(\{p_i\}), \quad (49)$$

که همان رابطه ای است که می خواستیم ثابت کنیم.

به این ترتیب قضیه را برای وقتی که حالت های σ_i خالص بودند ثابت کردیم. حال می توانیم از این حالت خاص استفاده کرده و حالت کلی را که در آن دیگر σ_i ها حالت های خالص نیستند را ثابت کنیم: کافی است که دقت کنیم هر کدام از حالت های σ_i را می توان تجزیه طیفی کرد:

$$\sigma_i = \sum_j q_{i,j} |\phi_{ij}\rangle\langle \phi_{ij}|. \quad (50)$$

دقت کنید که

$$\langle \phi_{ij} | \phi_{ik} \rangle = \delta_{jk} \quad \sum_j q_{ij} = 1, \quad \forall i. \quad (51)$$

هم چنین داریم

$$S(\sigma_i) = H(\{q_{ij}\}). \quad (52)$$

در نتیجه داریم

$$\rho = \sum_i p_i \sigma_i = \sum_{i,j} p_i q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle \phi_{ij}|. \quad (53)$$

در این رابطه می دانیم که

$$\sum_{i,j} p_i q_{ij} = 1.$$

حال از رابطه (۴۹) استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\sum_i p_i \sigma_i) = S(\sum_{i,j} p_i q_{ij} | \phi_{ij} \rangle \langle \phi_{ij} |) \leq H(\{p_i q_{ij}\}). \quad (54)$$

حال کافی است که طرف راست را ساده کنیم. می نویسیم:

$$\begin{aligned} H(\{p_i q_{ij}\}) &= - \sum_{i,j} p_i q_{ij} \log_2(p_i q_{ij}) = - \sum_{i,j} p_i q_{ij} (\log_2(p_i) + \log_2(q_{ij})) \\ &= H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \end{aligned} \quad (55)$$

به این ترتیب قضیه به طور کامل ثابت می شود.

■ **مثال:** شخصی به ما می گوید که آنتروپی حالت

$$\rho = \frac{1}{4}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{3}|b\rangle\langle b| + \frac{1}{6}|c\rangle\langle c| + \frac{1}{4}|d\rangle\langle d|,$$

که در آن حالت های نوشته شده دلخواه هستند که الزاما بر هم عمود نیستند، برابر است با 2.15 بیت. چگونه می توانیم ادعای او را قبول

یا رد کنیم؟

حال می خواهیم خاصیتی از آنتروپی را بررسی کنیم که به خاصیت زیر جمع پذیری قوی^۸ مشهور است. از این قضیه می توان خاصیت زیر جمع پذیری (که قبلا آن را ثابت کرده ایم) و بعضی از خاصیت های جدید و مهم را برای آنتروپی بدست آورد. در ادامه این قضیه را ثابت نخواهیم کرد، اما نشان می دهیم که چگونه می توان نتایج مهمی را از آن استخراج کرد. دانستن و فهمیدن این نتایج از اثبات این قضیه اهمیت بیشتری دارد.

■ **قضیه:** زیرجمع پذیری قوی برای آنتروپی فون نویمان: به یاد می آوریم که زیر جمع پذیری برای آنتروپی شانون به صورت زیر بیان

می شود: به ازای هر سه متغیر تصادفی X, Y, Z و نامساوی زیر برقرار است:

$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Y). \quad (56)$$

Strong subadditivity Theorem^۸

این رابطه در واقع بیان می کند که ایجاد شرط اضافه باعث کاهش انتروپی شانون می شود. به عبارت دیگر اگر علاوه بر مقدار Y مقدار Z را نیز تعیین کنیم، اطلاعات کمتری در X باقی می ماند. این نامساوی را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(X, Y, Z) - H(Y, Z) \leq H(X, Y) - H(Y) \quad (57)$$

خاصیت زیر جمع پذیری قوی برای آنتروپی کوانتومی دقیقاً مشابه رابطه های بالاست، به این معنا که با تعریف آنتروپی شرطی به صورت

$$S(A|B) := S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \quad (58)$$

برای هر سیستم سه بخشی داریم:

$$S(A|B, C) \leq S(A|B) \quad (59)$$

و یا

$$S(\rho_{ABC}) - S(\rho_{BC}) \leq S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \quad (60)$$

همانطور که در ابتدا گفتیم این رابطه را در انتهای این درس ثابت می کنیم اما الان می خواهیم ببینیم این نامساوی چه نتایجی در بر دارد. این نتایج را در زیر می نویسیم:

• **نتیجه اول:** می توان خاصیت زیر جمع پذیری را از خاصیت زیر جمع پذیری قوی بدست آورد. برای این کار سیستم سه تایی را در حالت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho_{ABC} = \rho_{AC} \otimes |0\rangle\langle 0|_B \quad (61)$$

که در آن $|0\rangle$ یک حالت دلخواه خالص است. در این صورت داریم:

$$S(\rho_{ABC}) = S(\rho_{AC}), \quad S(\rho_B) = 0, \quad S(\rho_{AB}) = S(\rho_A), \quad S(\rho_{BC}) = S(\rho_C). \quad (62)$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (60) به رابطه زیر جمع پذیری معمولی می رسیم.

• **نتیجه دوم:** قبلا دیدیم که خاصیت $S(A, B) \geq S(A)$ برای آنتروپی کوانتومی بر خلاف آنتروپی کلاسیک برقرار نیست. معنای این حرف این است که آنتروپی شرطی کوانتومی همواره یک کمیت مثبت نیست. مثالی که ذکر کردیم نیز یک حالت خالص درهم تنیده بود که آنتروپی سیستم بزرگ برابر با صفر و آنتروپی یک زیر سیستم آن برابر با یک بود. نکته مهم آن است که اگر چه آنتروپی یک زیر سیستم می تواند از آنتروپی کل سیستم بزرگ تر باشد ولی این کار برای دو زیر سیستم امکان پذیر نیست! به این معنا که اگر یک سیستم سه بخشی ABC داشته باشیم آنگاه نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$S(A) + S(B) \leq S(A, C) + S(B, C). \quad (63)$$

در واقع ممکن است که $S(A)$ از $S(A, C)$ بزرگ تر باشد یا $S(B)$ از $S(B, C)$ بزرگ تر باشد ولی هر دو نامساوی همزمان نمی توانند برقرار باشند. یک راه دیگر بیان این موضوع این است که در یک سیستم سه بخشی یک بخش نمی تواند با دو بخش دیگر در حالت درهم تنیده ماکزیمال قرار بگیرد. زیرا اگر چنین باشد طرف راست نامساوی بالا برابر با صفر و طرف چپ آن (برای کیوبیت ها) برابر با ۲ است. این خاصیت به نام خاصیت تک همسری درهم تنیدگی^۹ شناخته می شود.

برای اثبات این نامساوی کافی است که به رابطه زیر جمع پذیری قوی یعنی رابطه (۶۰) توجه کنیم و سیستمی مثل R در نظر بگیریم به قسمی که سیستم $ABCR$ در یک حالت خالص باشد. در این صورت می دانیم که

$$S(ABC) = S(R), \quad S(BC) = S(AR). \quad (64)$$

با جایگذاری این تساوی ها در (۶۰) بدست می آوریم:

$$S(R) - S(AR) \leq S(AB) - S(B) \quad (65)$$

و پس از مرتب کردن

$$S(R) + S(B) \leq S(AR) + S(AB), \quad (66)$$

که چیزی نیست جز همان رابطه ای که می خواستیم ثابت کنیم (البته با نام های عوض شده).

• **نتیجه سوم:** صرف نظر کردن از یک بخش همواره باعث کاهش اطلاعات متقابل می شود، به این معنا که برای هر سیستم سه بخشی

^۹ Monogamy of Entanglement

داریم:

$$I(A : B) \leq I(A : B, C). \quad (67)$$

از نظر شهودی این رابطه معنای روشنی دارد به این صورت که بهر حال دانستن اطلاعاتی در مورد B و C مقدار بیشتری اطلاعات در مورد A به ما می دهد تا وقتی که تنها اطلاعاتی در باره B داشته باشیم. اما اثبات این رابطه خیلی ساده است. کافی است که این رابطه را باز کنیم و بنویسیم

$$S(A) + S(B) - S(A, B) \leq S(A) + S(B, C) - S(A, B, C), \quad (68)$$

که با حذف $S(A)$ از دو طرف می بینیم چیزی نیست جز همان خاصیت زیر جمع پذیری قوی.

• **نتیجه چهارم:** نتیجه چهارم: یک کانال کوانتومی هیچگاه اطلاعات متقابل را افزایش نمی دهد. به عبارت دقیق تر سیستم مرکب AB را در نظر بگیرید که در حالت ρ_{AB} قرار دارد. حال فرض کنید که این سیستم تحت تاثیر یک کانال کوانتومی مثل \mathcal{E}_B قرار می گیرد. بنابراین کانال \mathcal{E} فقط روی B اثر می کند. طبیعی است که حالت ρ_A در این صورت تغییر نمی کند. می خواهیم ببینیم آیا کانال \mathcal{E} می تواند اطلاعات متقابل بین دو قسمت A و B را افزایش دهد یا خیر. پاسخ این است که خیر و این پاسخ از نظر فیزیکی و شهودی نیز مورد انتظار است.

برای فهم اثبات این نتیجه چهارم که در پی می آید توجه به تمرین های حل شده ی زیر مهم است:

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I \otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) \quad (69)$$

که در آن \mathcal{E}_B یک نگاشت رد نگهدار است، نشان دهید که $\rho'_A = \rho_A$.

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \quad (70)$$

که در نتیجه

$$\rho_A = \sum_i x_i \otimes \text{tr}(y_i) \quad (71)$$

در نتیجه

$$(I \otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) = \sum_i x_i \otimes \mathcal{E}_B(y_i). \quad (72)$$

حال روی بخش دوم رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_A := \text{tr}_B(\rho'_{AB}) = \sum_i x_i \otimes \text{tr}(\mathcal{E}_B(y_i)) = \sum_i x_i \otimes \text{tr}(y_i) = \rho_A. \quad (73)$$

دقت کنید که این نتیجه فقط برای نگاشت رد-نگهدار درست است.

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) \quad (74)$$

نشان دهید که

$$\rho'_B = U_B \rho_B U_B^\dagger. \quad (75)$$

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \quad (76)$$

که در نتیجه

$$\rho_B = \sum_i (\text{tr} x_i) y_i. \quad (77)$$

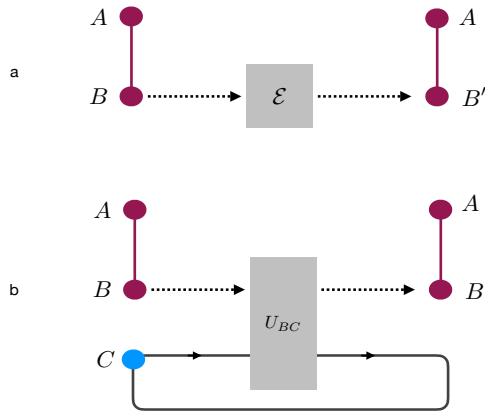
بنابراین

$$(I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) = \sum_i x_i \otimes U_B y_i U_B^\dagger. \quad (78)$$

حال روی بخش اول رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_B := \sum_i \text{tr}(x_i) U_B y_i U_B^\dagger = U_B \left(\sum_i (\text{tr} x_i) y_i \right) U_B^\dagger = U_B \rho_B U_B^\dagger. \quad (79)$$

توجه می‌کنیم که کانال یاد شده را همواره می‌توان به صورت زیر اعمال کرد. یک حالت مشخص مثل $|0\rangle_C$ در کنار حالت ρ_{AB} قرار می‌دهیم و روی کل این حالت عملگر U_{BC} را اعمال کرده و سپس روی C رد می‌گیریم، شکل (۴).



شکل ۴: شکل بالایی کانال \mathcal{E} را نشان می‌دهد که روی بخش B اثر می‌کند. شکل پایینی: این کانال را می‌توان به صورت یک عملگر یکانی نشان داد که روی یک بخش بزرگ‌تر عمل می‌کند و در انتها روی بخش اضافی رد گرفته می‌شود.

بیاید حالت‌های قبل از عمل کانال را با حروف بدون پرایم و حالت‌های بعد از عمل کانال را با حروف با پرایم نشان دهیم. به این ترتیب

می‌توانیم بنویسیم:

$$\rho_{A'B'C'} = (I \otimes U_{BC}) \rho_{ABC} (I \otimes U_{BC}^\dagger) \quad (80)$$

که به معنای این است که

$$\rho_{B'C'} = U_{BC} \rho_{BC} U_{BC}^\dagger. \quad (81)$$

برای اثبات قضیه، به نتیجه‌ای که قبلاً بدست آورده ایم تکیه می‌کنیم که بر مبنای آن اطلاعات متقابل با افزودن یک سیستم دیگر هیچ وقت

کم نمی‌شود به عبارت دیگر:

$$I(A' : B') \leq I(A' : B'C') \quad (82)$$

حال نشان می‌دهیم که طرف راست چیزی نیست جز $I(A : B)$. برای این کار عبارت صریح طرف راست را می‌نویسیم و از نتایج دو تمرین قبلی

و روابط (۸۰) و (۸۱) استفاده می کنیم:

$$I(A' : B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(BC) - S(ABC) \quad (۸۳)$$

اما چون

$$\rho_{ABC} = \rho_{AB} \otimes |0\rangle_C \langle 0| \quad (۸۴)$$

خواهیم داشت

$$S(BC) = S(B) \quad S(ABC) = S(AB) \quad (۸۵)$$

و در نتیجه

$$I(A' : B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(B) - S(AB) = I(A : B). \quad (۸۶)$$

به این ترتیب نتیجه چهارم نیز ثابت می شود.

۳ ضمیمه: در باره جان فون نویمان



شکل ۵: جان فون نویمان، ریاضیدان مجارستانی (۱۹۰۳-۱۹۵۷)

جان فون نویمان ریاضیدان مجاری الاصلی بود که سالهای عمده عمر خود را در آمریکا و در موسسه مطالعات پیشرفته گذراند. وی در طول عمر کوتاه خود نه تنها بسیاری از زیر شاخه های ریاضیات مثل جبر و نظریه مجموعه ها و هم چنین فیزیک را متحول کرد بلکه سهم مهمی نیز در توسعه اقتصاد و آمار، نظریه بازی ها، تولید انرژی هسته ای و رایانش الکترونیک ایفا کرد. اغلب از او به عنوان یکی از آخرین ریاضیدانان بزرگ نام برده می شود. نبوغ افسانه امیز او حتی در زمان حیاتش باعث پیدایش انبوهی از حکایت ها و داستان ها شده بود که بین شاگردان و همکارانش رواج داشت. مشهور است که وقتی از او هر سوالی در هر زمینه ای از فیزیک یا ریاضیات می پرسیدی فقط سه ثانیه طول می کشید تا جواب بدهد. سه نمونه از این حکایت ها جالب اند:

انریکو فومی خطاب به یکی از همکارانش: « می دانی، جانی می توانست ده برابر سریع تر از من محاسبه ذهنی انجام دهد و من می توانم ده برابر سریع تر از تو محاسبه ذهنی انجام دهم. حالا می توانی بفهمی که جانی چقدر شگفت انگیز بود.»

یوجین ویگنر: «در باره قوای ذهنی فون نویمان احساس می کردی که با یک ماشین فوق العاده کامل روبرو هستی که همه اجزایش با دقت یک هزارم اینچ در حال کار کردن اند.»

هانس بته: « من بعضی وقت ها فکر می کنم که مغزی مثل مغز فون نویمان احتمالاً نشان دهنده این است که او به گونه ای فراتر از انسان تعلق داشته است.»

۴ مسئله ها

■ **تمرین**: آنتروپی فون نویمان مربوط به بردارهای درون کره بلوخ را برحسب شعاع بردارها حساب کنید. این تمرین به خوبی نشان می دهد که هر چه حالت خالص تر باشد، آنتروپی فون نویمان آن کمتر و هر چه حالت به یک حالت مخلوط نزدیک تر باشد آنتروپی فون نویمان آن بیشتر است.

■ **ماتریس چگالی دوکیوبیتی** زیر را در نظر بگیرید. برای آنکه این ماتریس نشان دهنده یک حالت کوانتومی باشد، پارامترهای آن می بایست در یک محدوده معین قرار بگیرند. نخست این محدوده را مشخص کنید. سپس آنتروپی فون نویمان این حالت را حساب کنید و مقدار کمینه و بیشینه آن را بدست آورید.

$$\rho = \frac{1}{4}(I + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \quad (87)$$

■ از خاصیت زیر جمع پذیری قوی استفاده کنید و درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$S(C|A) + S(C|B) \geq 0. \quad (88)$$

و

$$I(A : B) + I(A : C) \leq 2S(A). \quad (89)$$

هم چنین مثالی ارائه دهید که درستی رابطه زیر را نشان دهد:

$$S(A|C) + S(B|C) \neq 0. \quad (90)$$

دقت کنید که در حالت کلاسیک رابطه (۸۹) به این دلیل درست است که رابطه $H(A : B) \leq H(A)$ و $H(A : C) \leq H(A)$ اما در حالت کوانتومی این رابطه به دلیل خاصیت زیر جمع پذیری قوی برقرار است چرا که نامساوی های بالا الزاما برقرار نیستند. مثالی ارائه دهید که نشان دهد در حالت کوانتومی $I(A : B) > S(A)$.

■ تمرین: دو ماتریس چگالی یک کیوبیتی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \sigma = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (91)$$

آنتروپی های نسبی زیر را حساب کنید:

$$S(\rho \parallel \sigma), \quad S(\sigma \parallel \rho). \quad (92)$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2 \parallel \sigma_1 \otimes \sigma_2) = S(\rho_1 \parallel \sigma_1) + S(\rho_2 \parallel \sigma_2). \quad (93)$$

■ تمرین: دو حالت کیوبیتی خالص $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی آنها را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعدهای دلخواه تعمیم دهید.

■ تمرین: الف: نشان دهید که آنتروپی نسبی دارای خاصیت یکنوایی است یعنی برای هر دو سیستمی داریم:

$$S(\rho_A || \sigma_A) \leq S(\rho_{AB} || \sigma_{AB}). \quad (94)$$

ب: با استفاده از این خاصیت، خاصیت زیرجمع پذیری قوی را ثابت کنید. (راهنمایی: برای این کار رابطه بالا را برای ρ_{ABC} و $\rho_A \otimes \rho_{BC}$ به کار ببرید.)

پ: نشان دهید که به ازای هر کانال کوانتومی داریم:

$$S(\mathcal{E}(\rho) || \mathcal{E}(\sigma)) \leq S(\rho || \sigma). \quad (95)$$

(راهنمایی: از این موضوع استفاده کنید که هر کانال کوانتومی را می توان به صورت یک عملگر یکانی روی یک فضای بزرگ تر نشان داد.)

■ تمرین: یک حالت خالص $|\phi\rangle$ و یک حالت کاملاً آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون آنتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع آنتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

■ تمرین: برای کیوبیت ها یک حالت دلخواه ρ

و یک حالت کاملاً آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون آنتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع آنتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

■ خاصیت زیرجمع پذیری قوی را برای حالت کلاسیک بیان و ثابت کنید. برای این اثبات از خاصیت جمع پذیری قوی کوانتومی استفاده نکنید.

■ تمرین: آنتروپی حالت های $\rho_1 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}_1 \cdot \sigma)$ و $\rho_2 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}_2 \cdot \sigma)$ و $\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$ را بدست آورید و صحت نامساوی بالا را تحقیق کنید.

■ تمرین: در فضای d بعدی، حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\rho = \lambda|\psi\rangle\langle\psi| + \lambda|\phi\rangle\langle\phi|, \quad (96)$$

که در آن $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ دو حالت غیرمتعامد هستند. آنتروپی فون نویمان برای حالت ρ را برحسب λ و زاویه بین بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ حساب کنید و صحت نامساوی ۲۰ را تحقیق کنید.

■ تمرین: کانال واقطبش با پارامتر p را در نظر بگیرید. این کانال با احتمال $1 - p$ حالت را دست نخورده نگاه می دارد و با احتمال p آن را تبدیل به یک حالت کاملاً مخلوط می کند.

الف: آنتروپی حالت خروجی این کانال وقتی که یک حالت ورودی خالص را به آن وارد می کنیم چقدر است؟

ب: در میان کلیه حالت های ورودی (مخلوط یا خالص) کدام حالت است که آنتروپی حالت خروجی اش از همه کمتر است. (برای این قسمت فرض کنید که کانال کیوبیتی است).

■ تمرین: یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - 2P_0 - P_1) \rho + P_0 X \rho X + P_1 Y \rho Y + P_0 Z \rho Z, \quad (97)$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. از میان تمام حالت های خالص ورودی، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

یک کانال یکانی و تصادفی *Random Unitary* کانالی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i U_i \rho U_i^\dagger, \quad (98)$$

که در آن U_i ها ماتریس های یکانی هستند. ثابت کنید که در چنین کانالی همواره آنتروپی حالت خروجی بیش از آنتروپی حالت ورودی است.

■ تمرین: ثابت کنید که به طور کلی در یک کانال کوانتومی، آن حالت ورودی ای که آنتروپی خروجی را کمینه می کند حتماً یک حالت خالص است. (راهنمایی: فرض کنید که این حالت یک حالت مخلوط باشد، سپس آن را به حالت های خالص تجزیه کنید و از قضیه

تحدب آنتروپی شانون استفاده کنید. به این ترتیب ثابت می کنید که هرگاه یک حالت مخلوط ورودی دارای چنین خاصیتی باشد حتما می توانید یک حالت خالص نیز پیدا کنید که دارای چنین خاصیتی باشد).

■ تمرین: نشان دهید که اندازه گیری تصویری Projective Measurement همواره آنتروپی یک حالت را یا ثابت نگاه می دارد یا اینکه آن را افزایش می دهد. راهنمایی: یک اندازه گیری تصویری حالت را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i, \quad (99)$$

که در آن P_i ها عملگرهای تصویری هستند. نخست ثابت کنید که

$$\rho' P_i = P_i \rho' \quad \forall i. \quad (100)$$

سپس با قرار دادن عملگر $\sum_i P_i = I$ و استفاده از خاصیت های عملگرهای تصویری و هم چنین رابطه ۱۰۰ نشان دهید که $-tr(\rho \log \rho') = S(\rho' || \rho) = S(\rho) - tr(\rho \log \rho') \leq 0$ از نامساوی استفاده کنید و به نتیجه نهایی برسید.

برخلاف تصویری که از مثال های پیشین ممکن است بدست آمده باشد، یک کانال کوانتومی همواره آنتروپی حالت ها را افزایش نمی دهد. تمرین زیر این موضوع را روشن می کند.

■ تمرین: یک کانال کوانتومی با عملگرهای کراس $A_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $A_1 = |+\rangle\langle 1|$ در نظر بگیرید. حال یک حالت ورودی به این کانال بدهید که آنتروپی اش از آنتروپی حالت خروجی بیشتر باشد. با الهام از این مثال، یک کانال دیگر در بعد دلخواه تعریف کنید که دارای این خاصیت باشد.

■ تمرین: یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی: می خواهیم ثابت کنیم که

$$\sum_x p_x S(\rho_x) \leq S\left(\sum_x p_x \rho_x\right). \quad (101)$$

برای اثبات این نامساوی حالت زیر را تعریف کنید:

$$\rho_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \quad (102)$$

که در آن حالت های $\{|x\rangle\}$ یک مجموعه حالت های عمود برهم است. سپس از خاصیت زیر جمع پذیری استفاده کنید و رابطه ۱۰۱ را ثابت کنید.

■ تمرین: بازم یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی: تابع زیر را تعریف کنید:

$$f(p) = S(p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2) \quad (103)$$

که در آن σ_1 و σ_2 ماتریس های چگالی هستند. نشان دهید که

$$f'''(p) \leq 0.$$

(راهنمایی: نخست حالتی را در نظر بگیرید که در آن ماتریس های چگالی σ_1 و σ_2 وارون پذیر هستند و سپس حالت کلی را مطالعه کنید.

(

■ تمرین: یک ماتریس چگالی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \sum_i p_i \sigma_i, \quad (104)$$

که در آن σ_i ها ماتریس های چگالی ای هستند که پایه آنها برهم عمود هستند. نشان دهید که

$$S\left(\sum_i p_i \sigma_i\right) = H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \quad (105)$$

■ دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \quad |\phi_2\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle. \quad (106)$$

حالت مخلوط زیر را از این دو حالت تهیه می کنیم:

$$\rho = \frac{1}{2} (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|) \quad (107)$$

صحت رابطه (۴۲) را تحقیق کنید.

■ تمرین: الف: نشان دهید که به ازای هر ماتریس A همواره می توان ماتریس های یکانی U_i و احتمالات p_i را چنان یافت به قسمی که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_i p_i U_i A U_i^\dagger = \text{tr}(A) \frac{I}{d}. \quad (108)$$

ب: از خاصیت تحذب آنتروپی فون-نویمان استفاده کنید و نشان دهید که حالت کاملاً مخلوط تنها حالتی است که در آن آنتروپی به مقدار بیشینه خود می رسد.

■ یک کانال کوانتومی کیوبیتی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0(\rho + \sigma_z \rho \sigma_z) + p(\sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_y \rho \sigma_y), \quad 2p_0 + 2p = 1. \quad (109)$$

حالتی که آنتروپی خروجی کانال را کمینه می کند پیدا کنید. راهنمایی: این کانال یک نوع تقارن دارد به این معنا که

$$\mathcal{E}(\sigma_z \rho \sigma_z) = \sigma_z \mathcal{E}(\rho) \sigma_z. \quad (110)$$

■ یک کانال کوانتومی که روی حالت های کوانتومی سه ترازه اثر می کند به شکل زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0 \rho + p X \rho X^\dagger + p Z \rho Z^\dagger, \quad (111)$$

که در آن X و Z عملگرهای تعمیم یافته پائولی هستند. (برای تعریف به درس سوم تحت عنوان ماتریس های چگالی مراجعه کنید.)
حالتی را که خروجی اش کمترین میزان آنتروپی را دارد حساب کنید.

■ تمرین: نشان دهید که اگر یک تابع توامان محدب باشد آنگاه نسبت به هر کدام از متغیرهایش جداگانه محدب است.

■ قضیه لیب: ۱۰ ۱۱

به ازای هر ماتریس دلخواه X و به ازای $0 \leq t \leq 1$ تابع

$$f_t(A, B) := \text{tr}(A^t X B^{1-t} X^\dagger) \quad (112)$$

یک تابع توامان محدب نسبت به ماتریس های مثبت A و B است.

^{۱۰} Lieb Theorem

^{۱۱} الیوت اچ. لیب ریاضی فیزیکدان آمریکایی و استاد دانشگاه پرینستون است. کارهای وی در مکانیک آماری، آنالیز تابعی و ماده چگال است.

تمرین: فرض کنید که آلیس رشته هایی را به صورت زیر و با احتمال داده شده به باب می فرستد:

۱/۴	000
۱/۴	001
۱/۸	010
۱/۸	011
۱/۱۶	100
۱/۱۶	101
۱/۱۶	110
۱/۱۶	111

(۱۱۳)

- الف- احتمال این که آلیس رشته ای را شامل تعداد زوجی 1 به باب بفرستد چقدر است؟
- ب- به فرض اینکه رشته فرستاده شده زوج است احتمال اینکه رشته ارسال شده 110 باشد چقدر است؟
- ج - آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم رشته فرستاده شده زوج است حساب کنید.
- د- به فرض اینکه رشته فرستاده شده زوج نیست احتمال اینکه رشته ارسال شده 100 باشد چقدر است؟
- ه- آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم رشته فرستاده شده فرد است حساب کنید.
- و- به فرض اینکه اولین رقم سمت چپ رشته برابر با صفر باشد احتمال اینکه رشته ارسال شده 010 باشد چقدر است؟
- ز- آنتروپی شانون رشته ها را به شرط آنکه بدانیم اولین رقم سمت چپ رشته برابر با صفر است حساب کنید.
- ح - از اینکه رقم سمت چپ چه عددی است بیشتر اطلاع بدست می آورید یا از اینکه بدانید رشته ارسال شده زوج است یا فرد؟

تمرین: یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + b\sigma_x \otimes I + bI \otimes \sigma_x + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \quad (114)$$

آنتروپی فون نویمان این ماتریس چگالی را حساب کنید. مقادیر کمینه و بیشینه این آنتروپی چقدر است؟

■ تمرین: یک ماتریس چگالی به صورت

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad (115)$$

داده شده است که در آن $\beta = \frac{1}{kT}$ است. آنتروپی فون نویمان را برای این ماتریس چگالی حساب کنید. H هامیلتونی سیستم است.

■ تمرین: یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = \frac{1}{4} (I + a\sigma_z \otimes I + a I \otimes \sigma_z + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \quad (116)$$

آنتروپی فون نویمان این ماتریس چگالی را حساب کنید. مقادیر کمینه و بیشینه این آنتروپی چقدر است؟